

## 4<sup>th</sup> Lecture of Operation Research 2

### Primal-Dual Computations:

#### Example no. 1:

Consider the linear programming model:

$$\text{Max } Z = 3 X_1 + 2 X_2 + 5 X_3$$

S.T:

$$X_1 + 2 X_2 + X_3 \leq 30$$

$$3 X_1 + 2 X_3 \leq 60$$

$$X_1 + 4 X_2 \leq 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Standard Form:

$$\text{Max } Z = 3 X_1 + 2 X_2 + 5 X_3 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3$$

S.T:

$$X_1 + 2 X_2 + X_3 + S_1 = 30$$

$$3 X_1 + 2 X_3 + S_2 = 60$$

$$X_1 + 4 X_2 + S_3 = 20$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Check optimality and feasibility for the following basic solution:

$$X = \begin{bmatrix} S_1 \\ X_3 \\ S_3 \end{bmatrix}, \quad \text{IM} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هنا مدينى ترتيب الـ **basic variable** فى الـ **Solution** اللى أنا عايز اعمله **Check optimality and feasibility** والترتيب ده هحتاجه لما اجى اجيب الـ  $Y_1, Y_2, Y_3$  علشان أعمل **Check optimality**.

ومدينى الـ **Inverse Matrix** اللى هستخدمها علشان اشوف الحل اللى عندى **Feasible** ولا لا عن طريق ضرب **IM** فى الـ **R.H.S** للـ **Constraints** اللى عندى.

اولا هعمل **Check Feasibility** هضرب ال **IM** فى ال **R.H.S** لل **Constraints** اللى عندى وهشوف عمود ال **Solution** الجديد اللى هيطلعلى لو طلع أكبر من او يساوى الصفر ببقى الحل ده **Feasible** ولو طلع أقل من الصفر ببقى **Infeasible Solution**.

$$\begin{bmatrix} \text{Solution} \\ \text{Col} \\ \text{umn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} \geq 0$$

Then it is feasible solution.

بعد كده هجيب ال **Y1, Y2, Y3** هضرب معاملات ال **S1, X3, S3** فى ال **Objective Function** بنفس ترتيبهم اللى عندى فى اول المسألة فى ال **Inverse Matrix** وهطلع قيم ال **Y1, Y2, Y3**.

$$\text{Max } Z = 3 X_1 + 2 X_2 + 5 X_3 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3$$

$$(Y_1 \ Y_2 \ Y_3) = (0 \ 5 \ 0) \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0 \ 5/2 \ 0)$$

Then :

$$Y_1 = 0$$

$$Y_2 = 5/2$$

$$Y_3 = 0$$

بعد كده هجيب معامل ال **X1** فى ال **Z-Row** .. هضرب معامل ال **X1** فى ال **Constraint** الاول فى **Y1** + معامل ال **X1** فى ال **Constraint** الثانى فى ال **Y2** + معامل ال **X1** فى ال **Constraint** الثالث فى **Y3** - معامل ال **X1** فى ال **Objective fun.** واجيب قيمة معامل ال **X1** فى ال **Z-row** علشان اشوف ال **Optimality**.

X1 Coeff. In Z-Row :

$$Y_1 + 3 Y_2 + Y_3 - 3 = 0 + 3*5/2 + 0 - 3 = 9/2$$

وهكذا بالنسبة لل **X2**

X2 Coeff. In Z-Row :

$$2 Y_1 + 0 Y_2 + 4 Y_3 - 2 = 2*0 + 0*5/2 + 4*0 - 2 = -2$$

كده ال **Coefficient** بتاع ال **X2** فى صف ال **Z** طلع سالب والمسألة **Maximization** وفى ال **Max** لازم صف ال **Z** يكون صفر وموجب ببقى الحل ده مش **Optimal**

Then this solution not optimal.

### Example no. 2:

For the linear programming problem iteration i is given in the following table:

- Complete the table.
- Check optimality and feasibility.

$$\text{Min } Z = 2 X_1 + X_2$$

S.T:

$$3 X_1 + X_2 \geq 3$$

$$4 X_1 + 3 X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Standard Form:

$$\text{Min } Z = 2 X_1 + X_2 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3 + M R_1 + M R_2$$

S.T:

$$3 X_1 + X_2 + S_1 + R_1 = 3$$

$$4 X_1 + 3 X_2 + S_2 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2 X_2 + S_3 = 3$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

Start iteration:

Basic	X1	X2	S1	S2	R1	R2	S3	Sol.
Z	-2	-1	0	0	-M	-M	0	0
R1	3	1	-1	0	1	0	0	3
R2	4	3	0	-1	0	1	0	6
S3	1	2	0	0	0	0	1	3

The iteration that I want to complete and check feasibility and optimality:

Basic	X1	X2	S1	S2	R1	R2	S3	Sol.
Z								
X1					3/5	-1/5	0	
X2					-4/5	3/5	0	
S3					1	-1	1	

عائز اكمل الجدول هبدأ أجيب عمود الـ **X1** الجديد هضرب عمود الـ **X1** القديم اللي في الـ **Starting iteration** في الـ **IM** طب الـ **IM** اعرفها ازاي هي الـ **Matrix** اللي تحت الـ **Starting basic Variable** اللي هما **R1 , R2 , S3** في الـ **iteration** اللي انا شغال عليها.

$$\begin{bmatrix} \text{New} \\ \text{X1} \\ \text{column} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{New} \\ \text{X2} \\ \text{column} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{New} \\ \text{S1} \\ \text{column} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{New} \\ \text{S2} \\ \text{column} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{New} \\ \text{Sol.} \\ \text{column} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = 2 X1 + X2 = 2 \cdot 3/5 + 6/5 = 12/5$$

كده جبت كل الـ **Columns** الجديدة وجبت الـ **Z** الجديدة هبدأ بعد كده اجيب الويات علشان منها اجيب معاملات الـ **Variables** في الـ **Z-Row**

$$(Y_1 \ Y_2 \ Y_3) = (2 \ 1 \ 0) \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (2/5 \ 1/5 \ 0)$$

$$Y1 = 2/5 \quad Y2 = 1/5 \quad Y3 = 0$$

**R2 coeff. In Z-Row:**

هضرب معامل الـ **R2** في الـ **Constraint** الاول في **Y1** + معامل الـ **R2** في الـ **Constraint** الثاني في الـ **Y2** + معامل الـ **R2** في الـ **Constraint** الثالث في **Y3** - معامل الـ **R2** في الـ **Objective fun.**

$$0 Y1 + Y2 + 0 Y3 - M = 0 \cdot 2/5 + 1 \cdot 1/5 + 0 \cdot 0 - M = 1/5 - M$$

And so on:

S1 coeff. In Z-Row:

$$-Y1 - 0 = -2/5$$

S2 Coeff. In Z-Row:

$$-Y2 - 0 = -1/5$$

R1 coeff. In Z-Row:

$$Y1 - M = 2/5 - M$$

كده انا جبت كل حاجة جبت الـ **Columns** الجديدة وصف الـ **Z** الجديد هكمل الجدول بالقيم اللي طلعتها وابدأ اعمل  
. **Check feasibility and optimality**

Basic	X1	X2	S1	S2	R1	R2	S3	Sol.
Z	0	0	-2/5	-1/5	2/5 - M	1/5 - M	0	12/5
X1	1	0	-3/5	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
X2	0	1	4/5	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S3	0	0	-1	1	1	-1	1	0

أبدأ أعمل **Check** عمود الـ **Solution** كله موجب يبقى الحل ده **Feasible** وعندى المسألة **Min** وصف الـ **Z** كله صفر  
وسالب يبقى الحل ده **Optimal** .

**Sensitivity Analysis:**

**Example no. 3:**

Consider the linear programming problem:

$$\text{Max } Z = 3 X1 + 2 X2$$

S.T:

$$X1 + 2 X2 \leq 6$$

$$2 X1 + X2 \leq 8$$

$$- X1 + X2 \leq 1$$

$$X2 \leq 2$$

$$X1, X2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 3 X1 + 2 X2 + 0 S1 + 0 S2 + 0 S3 + 0 S4$$

S.T:

$$X1 + 2 X2 + S1 = 6$$

$$2 X1 + X2 + S2 = 8$$

$$- X1 + X2 + S3 = 1$$

$$X2 + S4 = 2$$

$$X1, X2, S1, S2, S3, S4 \geq 0$$

Dual:

$$\text{Min } W = 6 Y_1 + 8 Y_2 + Y_3 + 2 Y_4$$

S.T:

$$Y_1 + 2 Y_2 - Y_3 \geq 3$$

$$2 Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 2$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

Changes affecting feasibility :

- ❖ Changing availability of resource ( R.H.S of Constraint ).
- ❖ Adding a new constraint ( not redundant ).

Basic	X1	X2	S1	S2	S3	S4	Sol.
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3
X2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
S3	0	0	-1	1	1	0	3
S4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

a)  $b_1 : 6 \rightarrow 7$

هغير الـ R.H.S بتاع الـ Constraint الاول من 6 الى 7 وبعد كده هضرب الـ R.H.S للـ Constraints كلها في IM وهشوف الحل هيفضل Feasible ولا هيتغير

$$a) \begin{bmatrix} \text{New} \\ \text{Sol.} \\ \text{col} \\ \text{umn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{Then solution still feasible.}$$

New Solution :

$$X_2^* = 2 \quad X_1^* = 3 \quad Z^* = 3 X_1 + 2 X_2 = 3 * 3 + 2 * 2 = 9$$

b)  $b_2 : 8 \rightarrow 4$

$$b) \begin{bmatrix} \text{New} \\ \text{Sol.} \\ \text{col} \\ \text{umn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 1/8 \\ -2 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10/3 \\ 1/8 \\ -2 \\ -4/3 \end{bmatrix} < 0 \quad \text{Then solution is infeasible.}$$

$$Z_{New} = 3 \cdot 1/8 + 2 \cdot 10/3 = 23/3$$

هأخذ الـ **Solution** الجيد اللي طلعللى ده  $\begin{bmatrix} 10/3 \\ 1/8 \\ -2 \\ -4/3 \end{bmatrix}$  وهحطه مكان عمود الـ **Sol.** اللي فى الجدول عندى وابدأ أحل

**Dual Simplex** علشان احل مشكلة الـ **Feasibility** واشوف الحل الـ **feasible**

Basic	X1	X2	S1	S2	S3	S4	Sol.
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	23/3
X2	0	1	2/3	-1/3	0	0	10/3
X1	1	0	-1/3	2/3	0	0	1/8
S3	0	0	-1	1	1	0	-2
S4	0	0	-2/3	1/3	0	1	-4/3

Basic	X1	X2	S1	S2	S3	S4	Sol.
Z	0	0	0	5/3	1/3	0	21/3
X2	0	1	0	1/3	2/3	0	6/3
X1	1	0	0	1/3	-1/3	0	19/24
S1	0	0	1	-1	-1	0	2
S4	0	0	0	-1/3	-2/3	1	0

**New Solution:**

$$X_2^* = 6/3$$

$$X_1^* = 19/24$$

$$Z^* = 21/3$$

*Best Wishes*